Αγ. Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **(α)** Σχολικό σελ 76
(β) Σχολικό σελ 31, 33
(γ) Σχολικό σελ 73

Α2. Σωστή, Σωστή, Σωστή.

Α3. Λανθασμένη
Αιτιολόγηση: π.χ. αν είναι $f(x)=-x^2$, $x\neq 0$ και $g(x)=x^2$, $x\neq 0$ τότε προφανώς ισχύει ότι $f(x)<g(x)$ κοντά στο $x_0=0$, αλλά δεν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.

Α4. 1γ, 2α, 3α, 4δ, 5δ, 6β, 7δ, 8α

ΘΕΜΑ Β

Β1. **(α)** Προκύπτει εύκολα ότι είναι συνεχής στο $\left[-2,1\right)\cup\left(1,3\right)\cup\left(3,5\right]$ και ασυνεχής στο $x_0=1$.

(β) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα (αποδεικνύεται με ορισμό) στο $\left(3,5\right]$. Έτσι το σύνολο τιμών είναι

$$f\left((3,5]\right)=\left(\lim_{x\to 3^+} f(x),\ f(5)\right]=\left(1-e^2,0\right]$$

Β2. **(α)** Για κάθε $x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$ με

$$x_1<x_2$$

$$x_1^3<x_2^3 \quad \text{και} \quad \ln x_1<\ln x_2$$

$$x_1^3+\ln x_1<x_2^3+\ln x_2$$

$$x_1^3+\ln x_1-e<x_2^3+\ln x_2-e$$

Αγ. Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

$$h(x_1)<h(x_2)$$

Έτσι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

(β) Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με

$$x_1<x_2$$

$$h(x_1)<h(x_2) \quad \text{(h γνησίως αύξουσα)}$$
$$(g\circ f)(x_1)<(g\circ f)(x_2)$$
$$g(f(x_1))<g(f(x_2))$$
$$f(x_1)<f(x_2) \quad \text{(g γνησίως αύξουσα)}$$

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\Phi(2x)-5}{2x^2-7x}$ με x κοντά στο 2.

Θα είναι $\Phi(2x)=(2x^2-7x)g(x)+5$ και $\lim\limits_{x\to2}g(x)=-\infty$.

Τότε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to4}\Phi(x)&=\lim_{\omega\to2}\Phi(2\omega)=\\&=\lim_{\omega\to2}\left[(2\omega^2-7\omega)g(\omega)+5\right]=\\&=(8-14)(-\infty)+5=\\&=+\infty\end{aligned}$$

Γ2. Το όριο έχει νόημα για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

- Για $\alpha\neq7$ είναι

$$\lim_{x\to7}\frac{x^2-8x+7}{x-\alpha}=\frac{\lim\limits_{x\to7}(x^2-8x+7)}{\lim\limits_{x\to7}(x-\alpha)}=\frac{0}{7-\alpha}=0$$

Αγ. Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

- Για $\alpha=7$ είναι

$$\lim_{x\to 7}\frac{x^2-8x+7}{x-\alpha}=\lim_{x\to 7}\frac{x^2-8x+7}{x-7}=$$
$$=\lim_{x\to 7}\frac{(x-7)(x-1)}{x-7}=$$
$$=\lim_{x\to 7}(x-1)=6$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $x\neq 0$ είναι

$$x\cdot f(x)+3\eta\mu x=x^2$$
$$x\cdot f(x)=x^2-3\eta\mu x$$
$$f(x)=\frac{x^2-3\eta\mu x}{x}$$

Στο $x_0=0$ επειδή η f είναι συνεχής θα έχουμε

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3\eta\mu x}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(x-3\frac{\eta\mu x}{x}\right)=$$
$$=0-3\cdot 1=-3$$

Άρα είναι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3\eta\mu x}{x} & x\neq 0\\ -3 & x=0\end{cases}$

Δ2. **(α)** Για $x>0$ είναι

$$-1\le \eta\mu x\le 1$$
$$-\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{x}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ εφαρμόζοντας κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$ (1)

Τελικά το ζητούμενο όριο θα είναι:

Αγ. Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

$$\lim_{x\to 0^+} f(\tfrac{1}{x}) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - 3\frac{\eta\mu x}{x}\right) \overset{(1)}{=} +\infty \quad (2)$$

(β)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{21^{f(x)} - 20^{f(x)}}{2021^{f(x)} - 2020^{f(x)}} \overset{(2)}{=} \lim_{\omega\to+\infty} \frac{21^{\omega} - 20^{\omega}}{2021^{\omega} - 2020^{\omega}} =$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \frac{21^{\omega}\left(1 - \frac{20^{\omega}}{21^{\omega}}\right)}{2021^{\omega}\left(1 - \frac{2020^{\omega}}{2021^{\omega}}\right)} =$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \left(\left(\frac{21}{2021}\right)^{\omega} \frac{1 - \left(\frac{20}{21}\right)^{\omega}}{1 - \left(\frac{2020}{2021}\right)^{\omega}} \right) = 0 \cdot 1 = 0$$

Αφού $\lim\limits_{\omega\to+\infty} \left(\frac{21}{2021}\right)^{\omega} = 0$ και $\lim\limits_{\omega\to+\infty} \left(\frac{20}{21}\right)^{\omega} = 0$, $\lim\limits_{\omega\to+\infty} \left(\frac{2020}{2021}\right)^{\omega} = 0$

Δ3. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = f(x) - 4e^{-x}$ $x \in [0, +\infty)$. Επειδή από τη σχέση (2) είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} 4e^{-x} = 0$ θα είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - 4e^{-x}\right) = +\infty$ και έτσι θα υπάρχει $\mu > 0$ ώστε $g(\mu) > 0$.

- Η g είναι συνεχής στο $[0, \mu]$ ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων $y = f(x)$ και της $y = 4e^{-x}$.
- $\left.\begin{cases} g(0) = f(0) - 4e^{0} = -3 - 4 = -7 < 0 \\ g(\mu) > 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow g(0)\cdot g(\mu) < 0$

Από θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \mu)$ ώστε $g(x_0) = 0$.

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 4e^{-x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα x_0.

– – – – –

Επιμέλεια Διαγωνίσματος: Γρηγόρης Μπαξεβανίδης
Δέσποινα Σωτηροπούλου